

به نام پروردگار مهربان

HANDBOOK

فرمول‌نامه

ریاضیات

هفتم تا دوازدهم

تعاریف - روابط - فرمول‌ها - نمودارها

■ احسان لعل

■ مدیر و ناظر علمی گروه ریاضی: عباس اشرفی



لقمه



مهروماه

فهرست

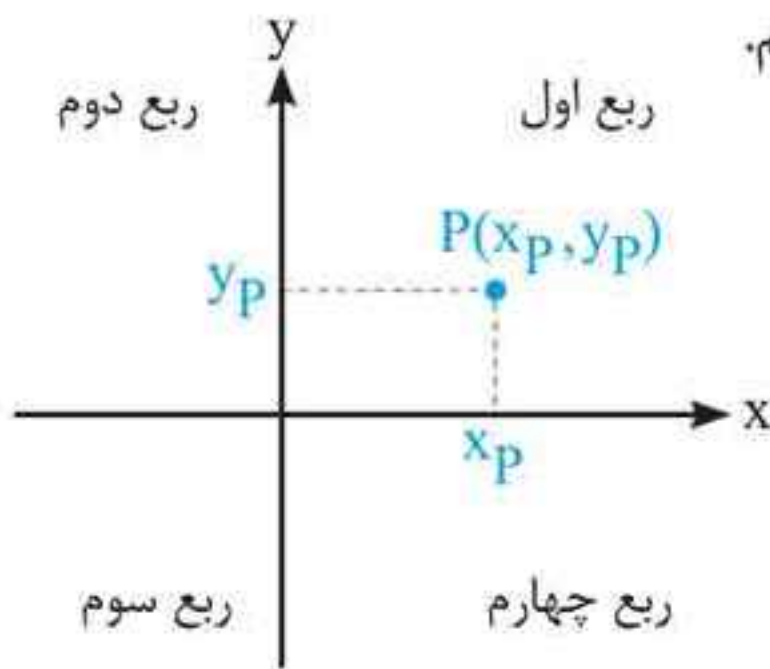
- فصل ۱: مجموعه اعداد ۹
- فصل ۲: عبارتهای جبری (اتحادها) ۱۱
- فصل ۳: توان و جذر ۱۵
- فصل ۴: الگو و دنباله ۱۹
- فصل ۵: معادله، نامعادله و تعیین علامت ۲۴
- فصل ۶: خط و معادله خط ۳۶
- فصل ۷: قدر مطلق ۴۱
- فصل ۸: جزء صحیح ۴۷
- فصل ۹: مثلثات ۵۱
- فصل ۱۰: تابع ۶۲
- فصل ۱۱: تابع نمایی و لگاریتمی ۸۶
- فصل ۱۲: حد و پیوستگی ۹۱
- فصل ۱۳: مشتق ۱۱۰
- فصل ۱۴: کاربرد مشتق ۱۲۴
- فصل ۱۵: هندسه ۱۴۴
- فصل ۱۶: مجموعهها ۲۵۰
- فصل ۱۷: منطق ریاضی ۲۵۸
- فصل ۱۸: آشنایی با نظریه اعداد ۲۶۷
- فصل ۱۹: گراف و مدل سازی ۲۸۱
- فصل ۲۰: ترکیبیات (شمارش) ۲۹۱
- فصل ۲۱: احتمال ۲۹۸
- فصل ۲۲: آمار ۳۰۵
- پیوست ۱: محیط، مساحت و حجم ۳۲۱
- پیوست ۲: نمودارهای توابع مهم ۳۲۷

فصل ۶

خط و معادله خط

خط و معادله خط

محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند. به هر نقطه مانند P در صفحه مختصات یک زوج مرتب (x, y) نظیر می شود که مختصات نقطه P را نشان می دهد. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می دهیم.



علامت ربعها:

ربع	اول	دوم	سوم	چهارم
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

فاصله بین دو نقطه: فاصله بین دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ را با AB نمایش می دهیم و به صورت زیر به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

فاصله نقطه A تا مبدأ: $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

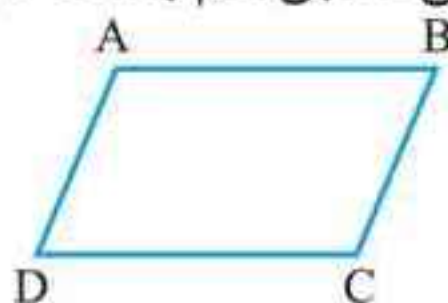
اگر A و B هم عرض باشند: $AB = |x_2 - x_1|$

اگر A و B هم طول باشند: $AB = |y_2 - y_1|$

مختصات نقطه وسط یک پاره خط: اگر A و B دو نقطه در صفحه و M وسط پاره خط AB باشد، مختصات M برابر است با:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$$

رابطه بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع: اگر A و C رئوس مقابل به هم و هم چنین B و D رئوس مقابل هم باشند داریم:



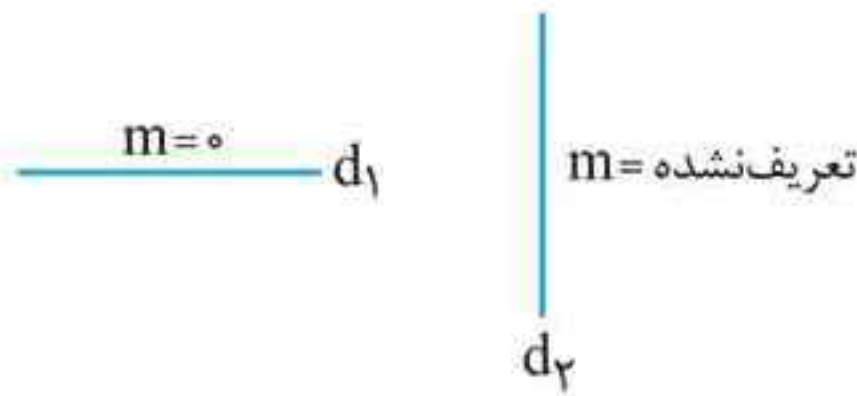
$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

شیب خط

شیب خط گذرنده از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ به صورت m_{AB} نمایش می‌دهند و برابر است با:

$$m_{AB} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

شیب خط افقی صفر و شیب خط عمودی تعریف نشده است.



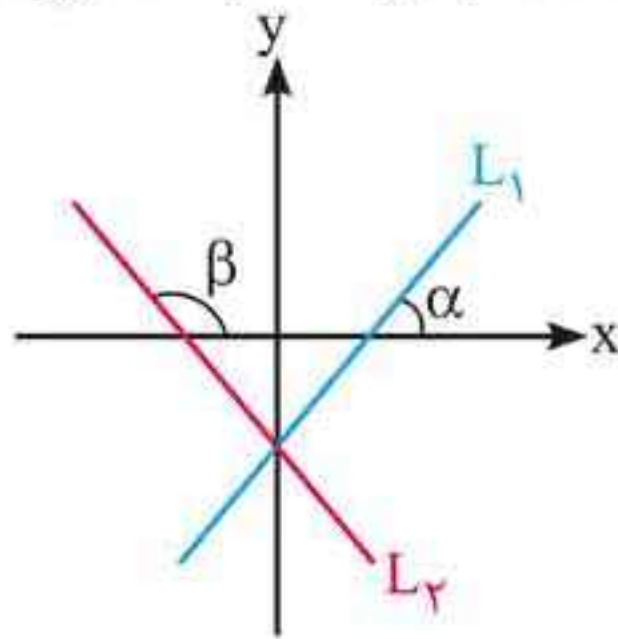
پایه نهم

محاسبه شیب خط:

۱ تانژانت زاویه‌ای که خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، برابر شیب خط است.

$$m_1 = \tan \alpha$$

$$m_2 = \tan \beta$$



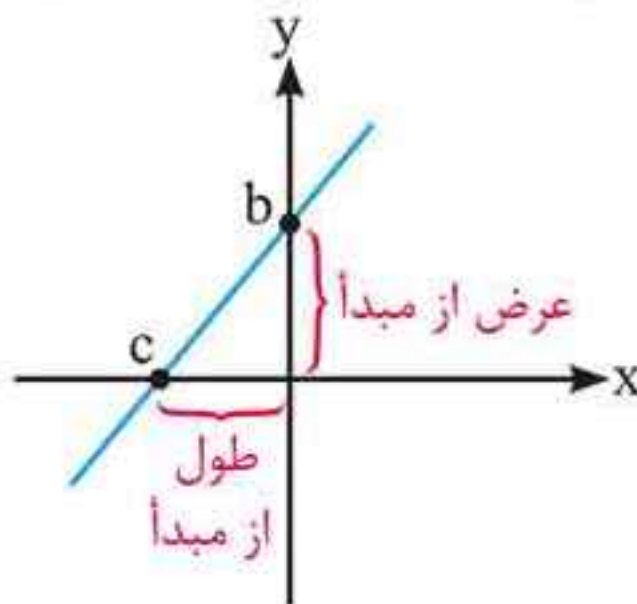
پایه دهم ریاضی و تجربی

۲ مقدار شیب در معادله خط $y = ax + b$ برابر ضریب x یعنی a است.

عرض از مبدأ و طول از مبدأ:

اگر خطی محور عرض‌ها را در $(0, b)$ قطع کند، عرض از مبدأ خط برابر b است.

اگر خطی محور طول‌ها را در $(c, 0)$ قطع کند، طول از مبدأ خط برابر c است.



پایه نهم

معادله خط

به رابطه بین طول و عرض تمام نقاط واقع بر یک خط، معادله آن خط گفته می‌شود.

به دست ردن معادله خط:

۱ اگر خطی با شیب m از نقطه $A(x_0, y_0)$ بگذرد معادله خط برابر است با:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

۲ اگر خطی از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ بگذرد ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

سپس با استفاده از یکی از دو نقطه A یا B معادله خط را می‌نویسیم:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ یا } y - y_2 = m(x - x_2)$$

وضعیت شیب دو خط موازی یا دو خط عمود:

۱ اگر دو خط موازی باشند، شیب‌های آن‌ها برابر است.

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

۲ اگر دو خط عمود بر هم باشند، حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها برابر

$$-1 \text{ است. } d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \times m_2 = -1$$

اگر θ زاویه بین دو خط متقاطع $y = mx + b$ و $y = m'x + b'$ باشد، $\tan \theta$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\tan \theta = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

فاصله نقطه از خط:

فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط d به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:



جدول نسبت‌های مثلثاتی:

تابع	رادیان	۰	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	درجه	۰	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
$\sin \alpha$	۰	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	۰	-۱	۰
$\cos \alpha$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	۰	-۱	۰	۱
$\tan \alpha$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$	ت.ن	ت.ن	۰	ت.ن	۰
$\cot \alpha$	ت.ن	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	ت.ن	ت.ن	۰	۰	ت.ن

محاسبهٔ زوایای متمم و مکمل:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(2k\pi - \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(2k\pi - \alpha) = -\tan \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(2k\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$$

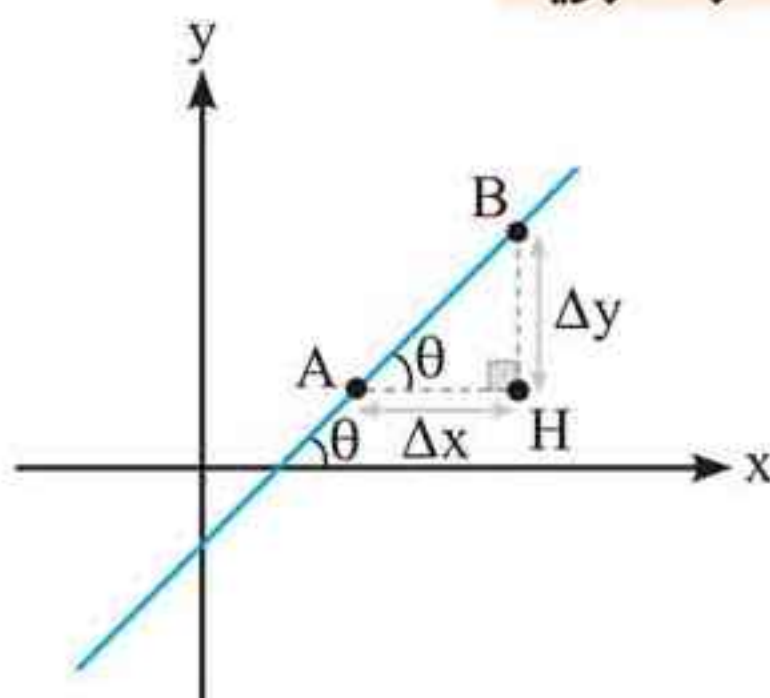
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$$

رابطه شیب خط با تانژانت زاویه:



$$\triangle ABH: \tan \theta = \frac{\text{تفاضل عرض‌ها}}{\text{تفاضل طول‌ها}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

۱ اگر خطی موازی محور x ها باشد شیب آن صفر است.

۲ اگر خطی عمود بر محور x ها باشد شیب آن تعریف نشده است.

معادله خط: معادله خطی که شیب آن برابر m و از نقطه $A(x_0, y_0)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



فرمول های مهم توابع مثلثاتی:

$$1 \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$2 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$3 \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$4 \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad \text{یا} \quad \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$5 \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$6 \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$7 \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$8 \quad \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$9 \quad (\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = 1 \pm 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$10 \quad \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$11 \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$12 \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

نسبت های مثلثاتی زاویه 2α :

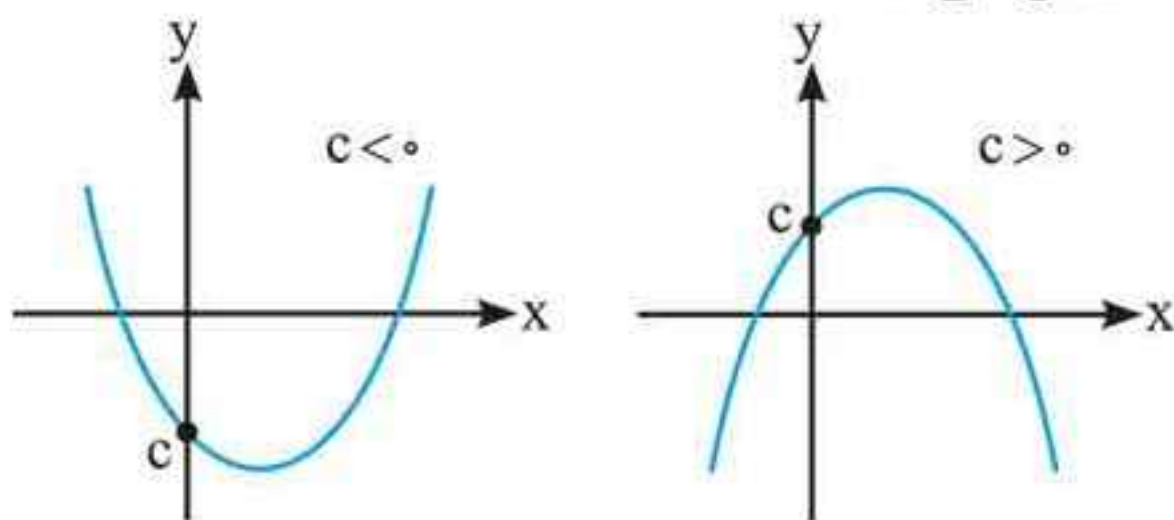
$$13 \quad \sin 2\alpha = \begin{cases} 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

تابع درجه دو:

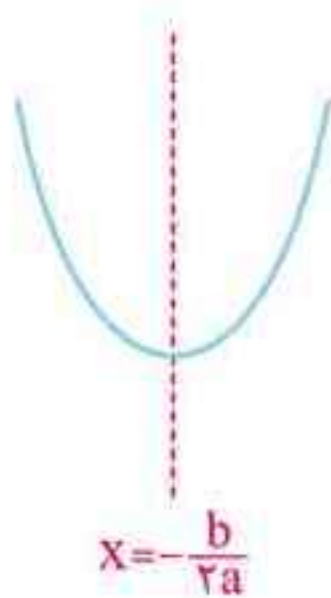
تابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ را که $a \neq 0$ و c, b عضو اعداد حقیقی باشند تابع درجه دو گویند. نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به شکل یک سهمی قائم است که دو حالت دارد:

نمودار	ویژگی‌ها	انواع سهمی درجه دو
	مینیمم دارد	دهانه سهمی رو به بالا $a > 0$
	ماکزیمم دارد	دهانه سهمی رو به پایین $a < 0$

محل برخورد منحنی با محور عرض‌ها را عرض از مبدأ تابع می‌نامند و آن را با c نمایش می‌دهند.


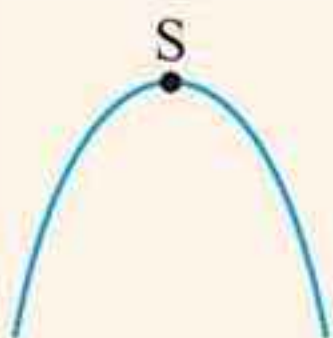


منحنی $f(x) = ax^2 + bx + c$ دارای محور تقارنی به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ است.





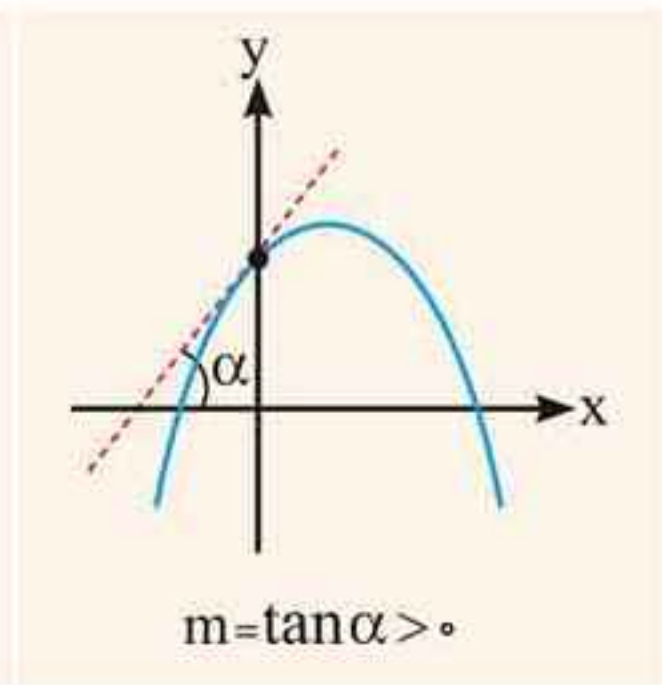
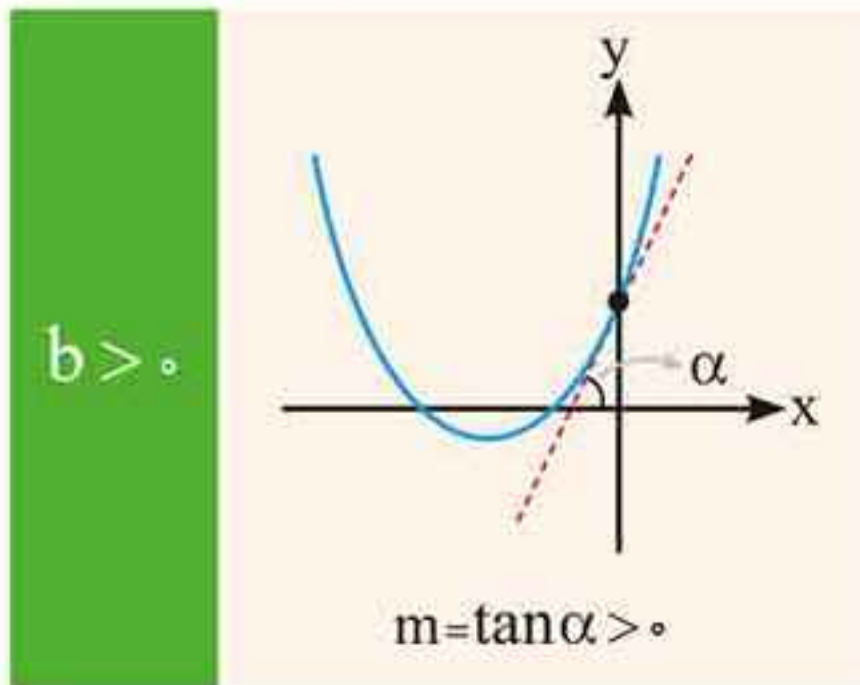
محل برخورد محور تقارن سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ با نمودار آن، رأس سهمی است.

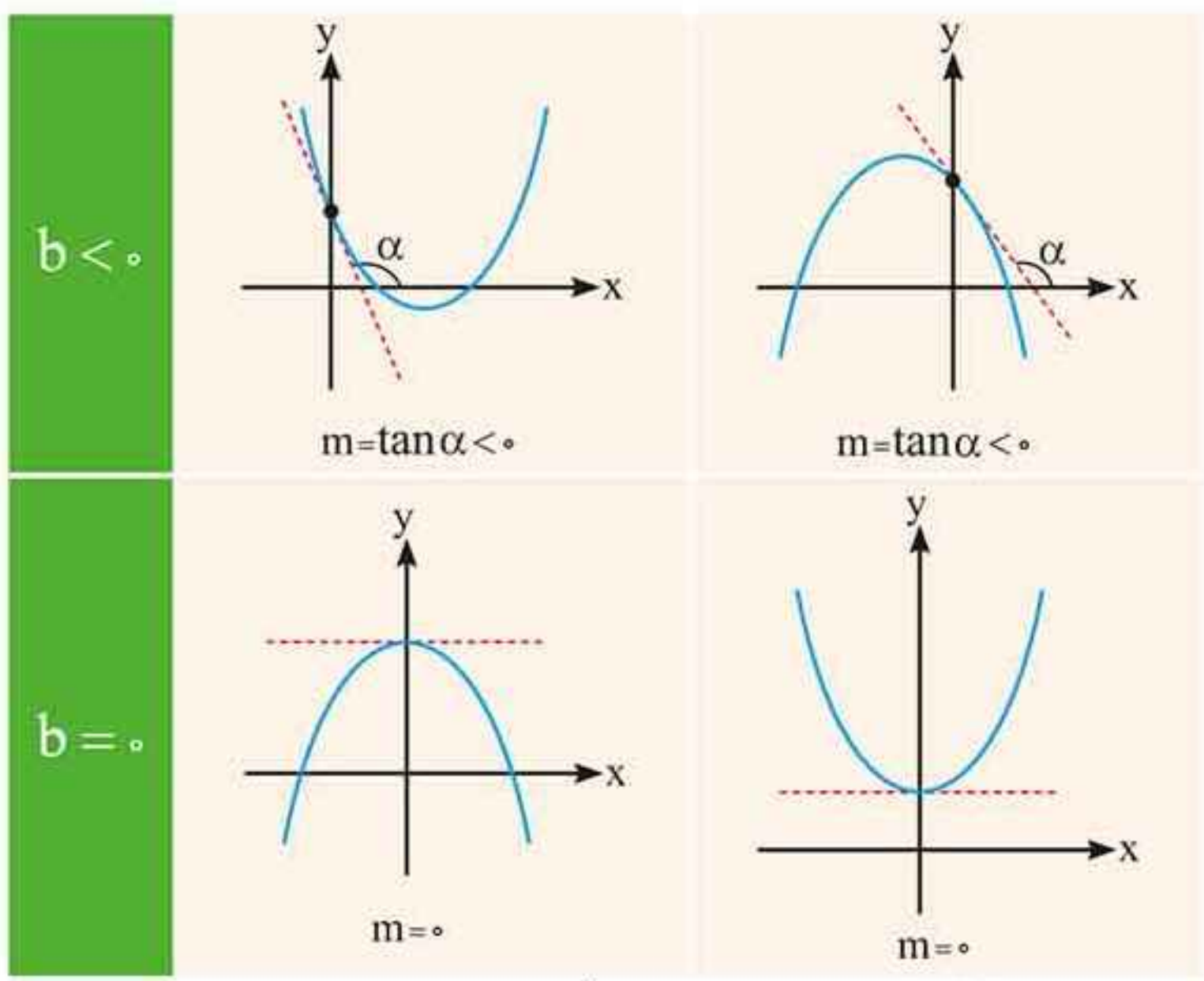
نمودار	مختصات رأس	نوع رأس	اگر
	$s\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$	مینیمم (کمترین عرض)	$a > 0$
	$s\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$	ماکزیمم (بیشترین عرض)	$a < 0$

در تابع درجه دوم به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ از روی نمودار می‌توان علامت b را به صورت زیر تعیین نمود.

خط مماس بر نمودار در نقطه برخورد با محور عرض‌ها رسم می‌کنیم.

شیب این خط سه حالت دارد:

$$\begin{cases} b > 0 \Rightarrow \text{شیب خط مثبت} \\ b = 0 \Rightarrow \text{شیب خط صفر} \\ b < 0 \Rightarrow \text{شیب خط منفی} \end{cases}$$




برای به دست آوردن طول و عرض رأس سهمی می توان:

طول رأس سهمی $x = \frac{-b}{2a}$

عرض رأس سهمی $\left\{ \begin{array}{l} \text{جای گذاری } x = \frac{-b}{2a} \text{ در تابع } f(x) \text{ روش (۱)} \\ \text{مقدار عرض را می یابیم} \\ \text{روش (۲): } y = \frac{-\Delta}{4a} \end{array} \right.$

سهمی درجه دوم را می توان به فرم $f(x) = a(x - k)^2 + c$ نیز نشان داد در این حالت داریم:

$$\begin{cases} a > 0 \rightarrow \text{مینیمم داریم} \rightarrow \text{رأس مینیمم } S(k, c) \\ a < 0 \rightarrow \text{ماکزیمم داریم} \rightarrow \text{رأس ماکزیمم } S(k, c) \end{cases}$$

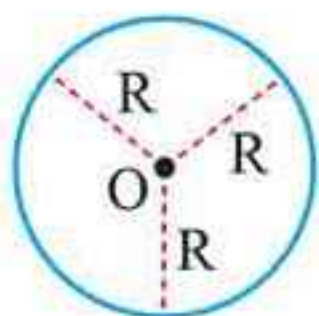
و در این حالت معادله خط تقارن برابر $x = k$ است.

فصل ۱۵

هندسه

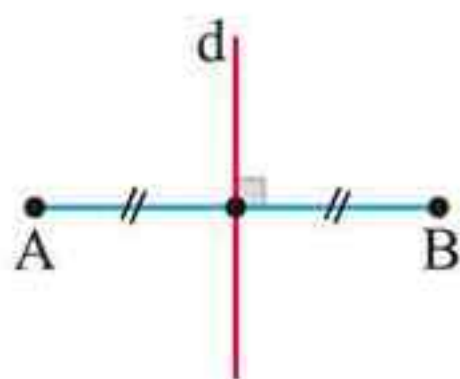
بخش اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



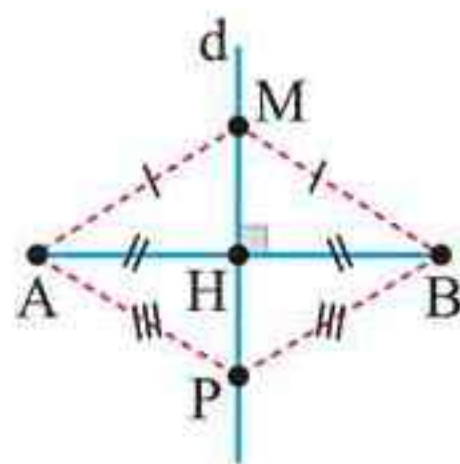
دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز) به فاصله‌ای ثابت (شعاع) قرار دارند.

عمودمنصف یک پاره‌خط: خطی است که بر یک پاره‌خط عمود باشد و آن را نصف کند.



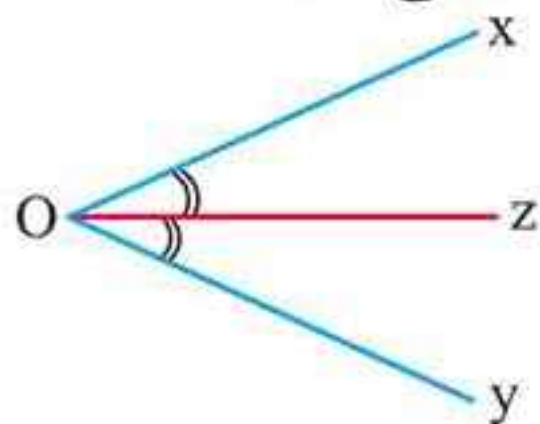
d عمودمنصف AB

هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس هر نقطه که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.



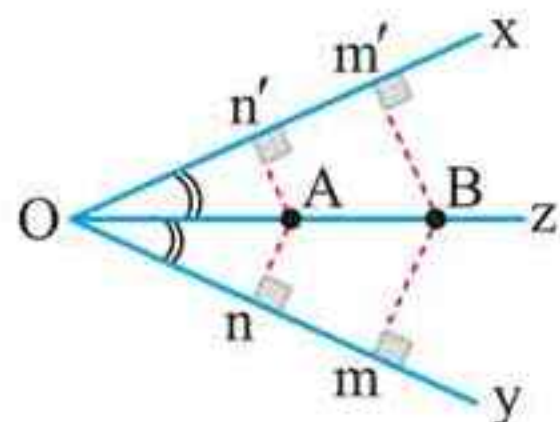
$$MA = MB, PA = PB, \dots$$

نیمساز یک زاویه: نیم خطی است که زاویه را نصف می کند.



$\widehat{XOZ} = \widehat{YOZ}$ است. \Leftrightarrow نیمساز XOY است.

هر نقطه که روی نیمساز قرار داشته باشد، از دو ضلع آن به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.



$$An = An', Bm = Bm', \dots$$

شرط وجود مثلث: سه پاره خط a ، b و c می توانند اضلاع یک مثلث باشند هر گاه:

$$\begin{cases} |b - c| < a < b + c \\ |a - c| < b < a + c \\ |a - b| < c < a + b \end{cases}$$

در مثلث ABC ، با میانمهای m_a ، m_b و m_c و ارتفاعهای h_a ، h_b و h_c که به ترتیب وارد بر ضلعهای a ، b و c هستند داریم:

$$\frac{|b - c|}{2} < m_a < \frac{b + c}{2}$$

$$\frac{|a - c|}{2} < m_b < \frac{a + c}{2}$$



$$\frac{|a-b|}{2} < m_c < \frac{a+b}{2}$$

$$h_a < \frac{b+c}{2}, \quad h_b < \frac{a+c}{2}, \quad h_c < \frac{a+b}{2}$$

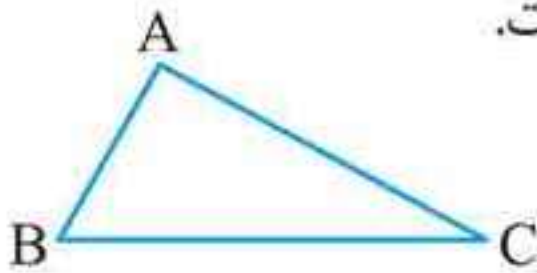
در هر مثلث دلخواه، همواره نامساوی زیر برقرار است: (P محیط مثلث)

$$\frac{1}{2}P < \text{بزرگ‌ترین ضلع مثلث} < \frac{1}{3}P < \text{کوچک‌ترین ضلع مثلث} < \frac{1}{2}P$$

اگر از نقطه‌های دلخواه مانند M درون مثلث به سه رأس آن وصل کنیم، همواره: (P محیط مثلث)

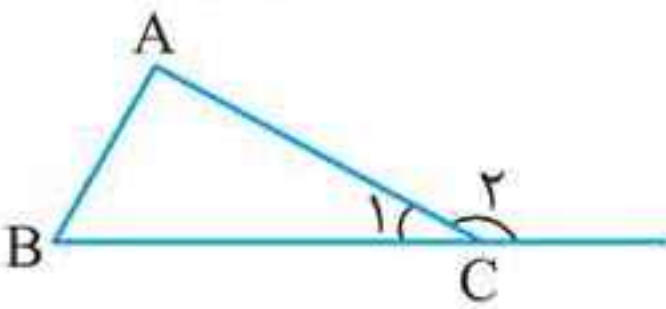
$$\frac{P}{2} < MA + MB + MC < P$$

مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

اندازه هر زاویه خارجی مثلث با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است.



$$\hat{C}_2 = \hat{A} + \hat{B}$$

هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

$$\hat{C}_2 > \hat{A}, \quad \hat{C}_2 > \hat{B}, \quad \dots$$

نیمسازهای هر مثلث هم‌رسند و نقطه هم‌رسی سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث: از سه ضلع مثلث به یک فاصله است و همواره درون مثلث قرار دارد.

عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌رس‌اند و نقطه هم‌رسی آن:

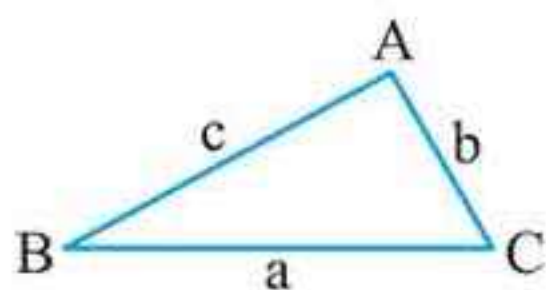
- ۱ اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، وسط وتر مثلث
- ۲ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، بیرون مثلث
- ۳ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه نداشته باشد، داخل مثلث

سه ارتفاع مثلث هم‌رس‌اند و نقطه هم‌رسی آن‌ها:

- ۱ اگر مثلث قائم‌الزاویه باشد، روی رأس قائم
- ۲ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه داشته باشد، بیرون مثلث
- ۳ اگر مثلث زاویه‌ای منفرجه نداشته باشد، داخل مثلث

تنها در مثلث متساوی‌الاضلاع نقطه هم‌رسی نیمسازهای داخلی، عمود منصف‌ها و ارتفاع‌ها بر هم منطبق است.

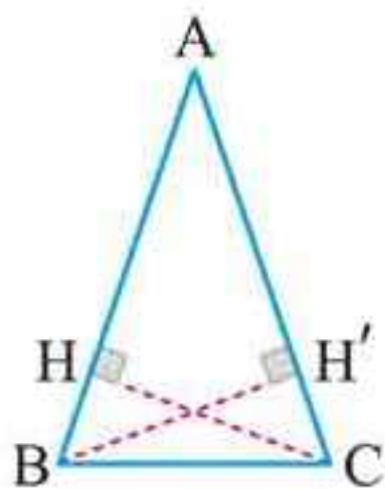
اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر و برعکس.



$$\hat{A} > \hat{B} \Leftrightarrow a > b$$

در یک مثلث دو ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر

ارتفاع‌های نظیر آن دو ضلع با هم برابر باشند.



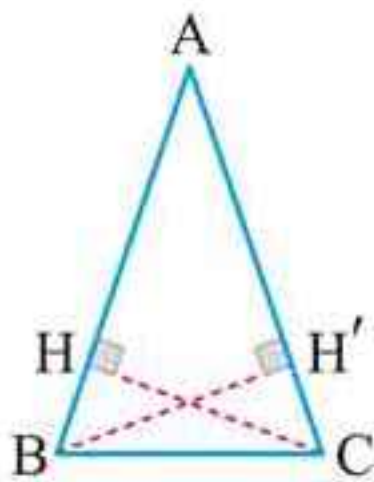
$$AB = AC \Leftrightarrow BH' = CH$$

یک مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر دو میانه برابر داشته باشد.
یک مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر اندازه نیمسازهای دو زاویه داخلی آن برابر باشند.

یک مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر میانه، ارتفاع و نیمساز



داخلي نظير يك رأس بر هم منطبق باشند.

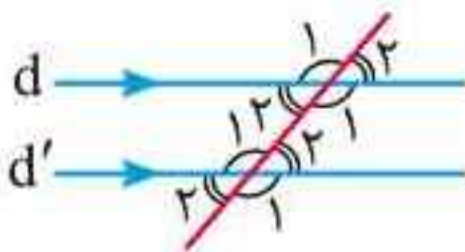


ميانه، ارتفاع و نيمساز AH

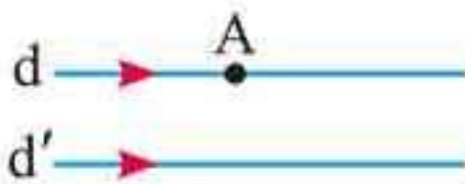
از يك نقطه غير واقع بر يك خط نمي توان بيش از يك عمود بر آن رسم كرد.



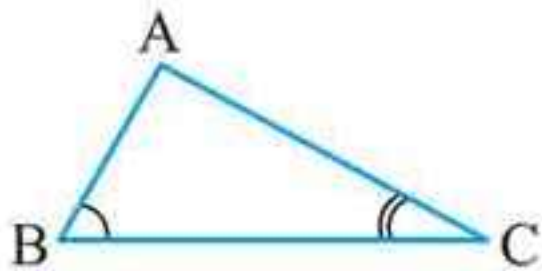
خطي كه يكي از دو خط موازي را قطع مي كند، ديگري را نيز قطع مي كند. در اين حالت زوايای حاده با هم و زوايای منفرجه با هم برابرند. در شكل تمام زوايای « ۱ » با هم و زوايای « ۲ » با هم برابرند.



از يك نقطه غير واقع بر يك خط، فقط يك خط موازي با آن مي توان رسم كرد.

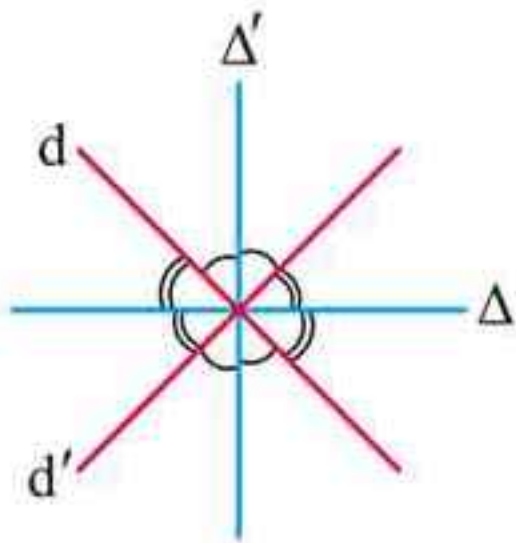


در هر مثلث، اگر دو ضلع نابرابر باشند، زاويه های روبه رو به آنها نيز نابرابرند و برعكس.

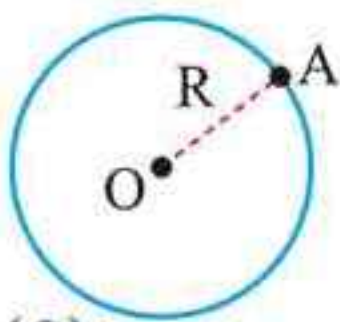


$$AB \neq AC \Leftrightarrow \hat{B} \neq \hat{C}$$

استدلال استقرایی: نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات استدلال استقرایی نام دارد.



مكان هندسي نقاطي از صفحه كه از دو خط متقاطع به يك فاصله اند، نيمسازهاي زاويه هاي بين دو خط متقاطع است.



۳ دایره، مكان هندسي نقاطي از صفحه است كه از يك نقطه ثابت در همان صفحه، به يك فاصله اند. (نقطه ثابت، مركز دایره و فاصله مورد نظر، شعاع دایره است).

$$\forall A; A \in (C) \Leftrightarrow OA = R$$

(C)

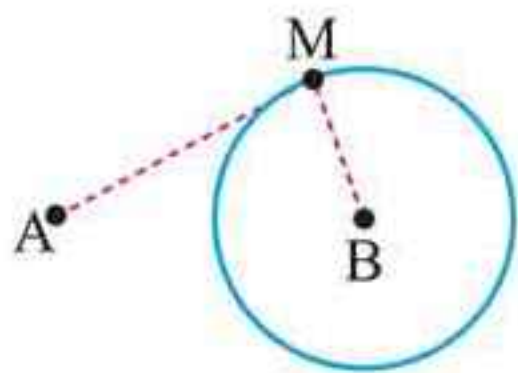
۴ مكان هندسي نقاطي از صفحه كه از خط معين d در صفحه به فاصله معلوم I هستند، دو خط راست موازي با d و در دو طرف آن به فاصله I از آن هستند.



۵ مكان هندسي نقاطي از صفحه، كه از دو خط موازي به يك فاصله اند، يك خط راست موازي با آن دو خط است كه از فاصله بين آن دو خط مي گذرد.

۶ مكان هندسي مركز دایره هاي به شعاع ثابت R ، كه بر خط ثابت d در صفحه، مماس اند، دو خط راست موازي با خط d و در دو طرف آن و به فاصله R از آن هستند.

۷ مكان هندسي نقاطي از صفحه كه فاصله آنها از نقطه ثابت A در صفحه، k برابر فاصله آنها از نقطه ثابت B در همان صفحه است، يك دایره است.

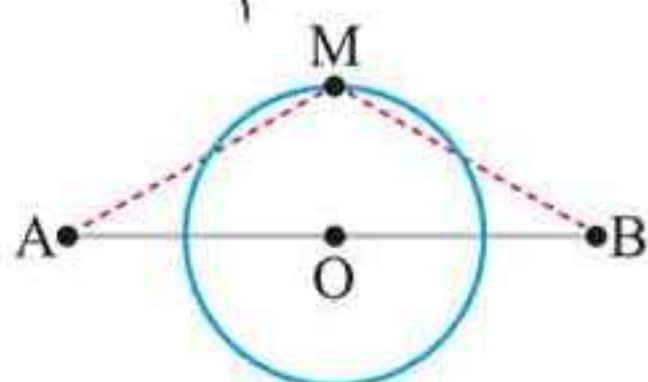


$$(k \in \mathbb{R}^+, k \neq 1)$$

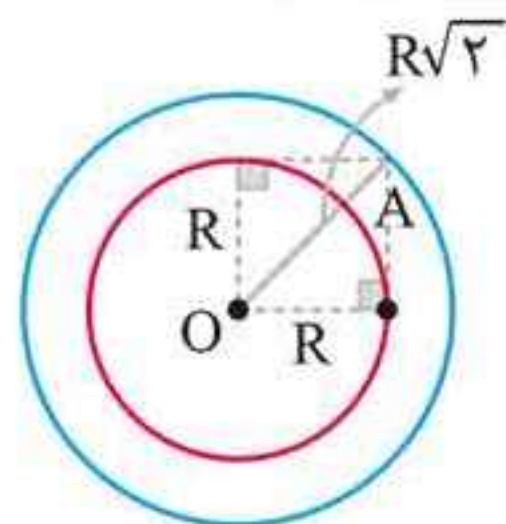
$$MB = k \cdot MA \quad \text{يا} \quad \frac{MB}{MA} = k$$

اگر $k = 1$ باشد، این مکان هندسی یک خط است که همان عمود منصف پاره خط AB است.

۸ مکان هندسی نقاطی از صفحه، که مجموع مربع‌های فاصله‌های آنها از دو نقطه ثابت A و B در همان صفحه، برابر با مقدار ثابت k است، یک دایره است. $(k > \frac{AB^2}{2}, k \in \mathbb{R}^+)$

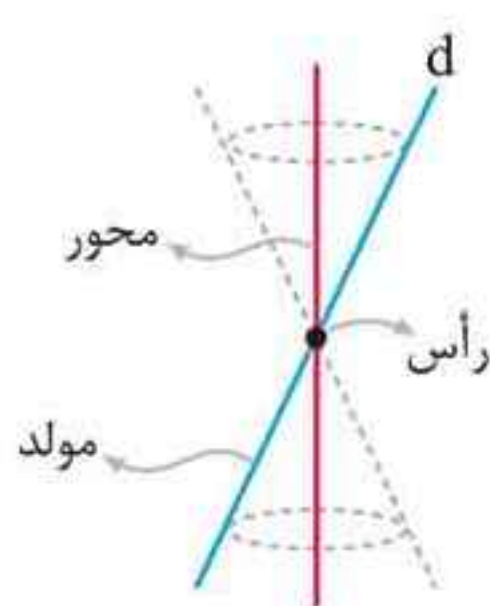


$$MA^2 + MB^2 = k$$



۹ مکان هندسی نقاطی از صفحه، که از آن نقاط می‌توان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد، دایره‌ای است هم‌مرکز با دایره اولیه، که شعاع آن $\sqrt{2}$ برابر شعاع دایره اولیه است.

مسائل ترکیبی: اگر S_1 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_1 و S_2 مکان هندسی نقاطی با ویژگی P_2 باشد، مجموعه نقاطی که هر دو ویژگی P_1 و P_2 را دارند، عبارت است از: $S_1 \cap S_2$



رویۀ مخروطی (سطح مخروطی): برای دو خط متقاطع (و غیر عمود) در فضا، سطح حاصل از دوران یکی از خط‌ها حول خط دیگر را رویۀ مخروطی گویند، خط دوران کننده را مولد، خط ثابت را محور و نقطه تقاطع آنها را رأس سطح مخروطی گویند.



$$a^{p-1} \equiv 1^p$$

آن گاه:

كلاس‌های هم‌نهشتی: مجموعه همه اعداد صحيح كه باقی مانده تقسیم آن‌ها بر عدد طبیعی m برابر با r است، كلاس هم‌نهشتی r به پیمانۀ m نامیده می‌شود.

$$[r]_m = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv r \text{ یا } x = mk + r\}$$

نمایش اعداد طبیعی در جدول ارزش مکانی (مبنای ۱۰):

اگر $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ یک عدد $(n+1)$ رقمی باشد آن گاه:

$$a = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

در مبنای ۱۰، هر رقم مقدار از صفر تا ۹ را می‌تواند اختیار کند.

$$1 \quad a \equiv b \xrightarrow{n|m} a \equiv b \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$2 \quad a \equiv b \Rightarrow (a, m) = (b, m)$$

$$3 \quad \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv b \pmod{(m, n)} \\ a \equiv b \pmod{[m, n]} \end{cases}$$

$$4 \quad \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{n} \end{cases} \xrightarrow{(m, n)=1} a \equiv b \pmod{mn}$$

$$5 \quad ac \equiv bc \xrightarrow[\substack{\div c \\ (m, c)=d}]{} a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

قاعده‌های بخش‌پذیری مهم

۱ بخش‌پذیری بر ۳ و ۹:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{۳ \text{ یا } ۹} \equiv \underbrace{a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 + a_0}_{\text{مجموع ارقام}}$$

۲ بخش‌پذیری بر ۱۱:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{۱۱} \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

۳ بخش‌پذیری بر ۸:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{\wedge} \equiv \overline{a_2 a_1 a_0}$$

۴ بخش‌پذیری بر ۴:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}^4 \equiv \overline{a_1 a_0}$$

۵ بخش‌پذیری بر ۲، ۵ و ۱۰:

$$\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{۲ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۱۰} \equiv a_0$$

قضیه نیوتن: اضافه یا کم کردن مضرب‌های عدد ۴ در توان هر عدد طبیعی، رقم یکان آن عدد را تغییر نمی‌دهد.

$$a^{۱۰} \equiv a^۵ \equiv a^۹ \equiv \dots$$

معادله هم‌نهشتی

یک هم‌نهشتی به صورت $ax \equiv b \pmod{m}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) با وجود مجهول x ، معادله هم‌نهشتی نامیده می‌شود. منظور از حل این معادله، پیدا کردن همه اعداد صحیحی است که به جای x در معادله صدق می‌کنند.

معادله هم‌نهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ جواب دارد اگر و تنها اگر $(a, m) | b$

فصل ۲۰

ترکیبیات (شمارش)

اصول اساسی شمارش

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحله، اولی به m طریق و دومی به n طریق صورت پذیرد، کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام می‌شود.

اصل جمع: اگر برای انجام عملی دو روش وجود داشته باشد و روش اول به m طریق و روش دوم به n طریق انجام شود آن گاه برای انجام آن عمل به روش اول یا دوم $m + n$ حالت وجود دارد.

■ **فاکتوریل:** حاصل ضرب اعداد طبیعی متوالی با شروع از یک و خاتمه با n را با نماد $n!$ نمایش می‌دهیم و آن را n فاکتوریل می‌خوانیم.

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$$

$$n! = n(n-1)!$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

جایگشت: به هر آرایش از قرارگیری چند شی در یک ردیف، یک جایگشت خطی از آن اشیاء گفته می‌شود. تعداد جایگشت‌های خطی n شیء دو به دو متمایز برابر است با $n!$.

تبدیل و ترکیب:

■ **تبدیل:** یک تبدیل r تایی از یک مجموعه n عضوی یک دنباله r تایی از میان اعضای آن مجموعه است.

تعداد تبدیلات r تایی n شیء دو به دو متمایز را با نماد $p(n, r)$ یا $(n)_r$ نمایش می‌دهیم و داریم:



$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ترکیب: یک ترکیب r تایی از میان n شی متمایز یک زیرمجموعه r تایی از میان آن‌ها است تعداد ترکیبات r تایی n شیء را با نماد

$c(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

جایگشت‌های دایره‌ای: تعداد حالت‌های قرار گرفتن n شیء متمایز بر روی یک مسیر دایره‌ای (یا یک مسیر بسته) برابر است با: $(n-1)!$ تعداد حالت‌های انتخاب r شیء از میان n شیء به طوری که:

الف شامل k شیء مشخص باشد برابر است با:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

ب فاقد k شیء متمایز باشد برابر است با:

$$\binom{n-k}{r}$$

دو قاعده مهم:

$$\text{۱} \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\text{۲} \quad \binom{n-r}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

جایگشت با تکرار: تعداد جایگشت‌های n شیء که r تای آن‌ها یکسان

باشند برابر است با $\frac{n!}{r!}$.

تعداد جایگشت‌های n شیء دو به دو متمایز که ترتیب k تای آن‌ها

معلوم باشد برابر است با: $\frac{n!}{k!}$.

تعداد افزارهای ۲ عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $2^n - 1$.

تعداد افزارهای $n - 1$ عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{2}$.

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$.

تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر

است با $\binom{n-1}{k-1}$.

مربع‌های لاتین

هر مربع لاتین از مرتبه n در یک ماتریس $n \times n$ است، که درایه‌های آن با اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ پر شده‌اند، به گونه‌ای که هر کدام دقیقاً یکبار در هر سطر و ستون ظاهر شوند.

۱	۲
۲	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

مربع لاتین مرتبه (۲) مربع لاتین مرتبه (۳)

۱ در مربع لاتین $n \times n$ که با اعداد $1, 2, \dots, n$ را پر شده است، در هیچ سطر و ستونی عدد تکراری وجود ندارد.

۲ با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، مربع لاتین جدیدی حاصل خواهد شد مثلاً یک جایگشت روی $1, 2, 3$ به صورت $3, 1, 2$ است.

مربع لاتین چرخشی: یک مربع $n \times n$ که سطر اول آن با اعداد



تعمیم قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ = P(A_1) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | (A_1 \cap A_2))$$

قانون احتمال کل: اگر B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + \dots + \\ P(B_n)P(A | B_n) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0 < P(B) < 1$ باشد با توجه به این که B و B' فضای S را افراز می‌کنند برای هر پیشامد دلخواه A ، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A | B) + P(B')P(A | B')$$

قانون بیز (احتمال‌های پس از مشاهده): فرض کنید B_1, B_2, \dots, B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه‌ای را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \leq n$ داریم:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{P(A)}$$

قانون بیز را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{k=1}^n P(B_k)P(A | B_k)}$$

توجه کنید آنچه در مخرج آمده، طبق قانون احتمال کل همان $P(A)$ است.

فصل بیست و یکم مهر و ماه

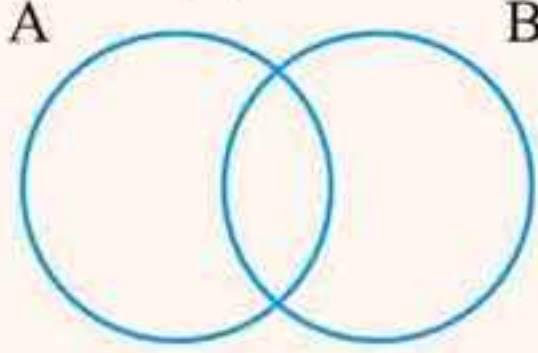
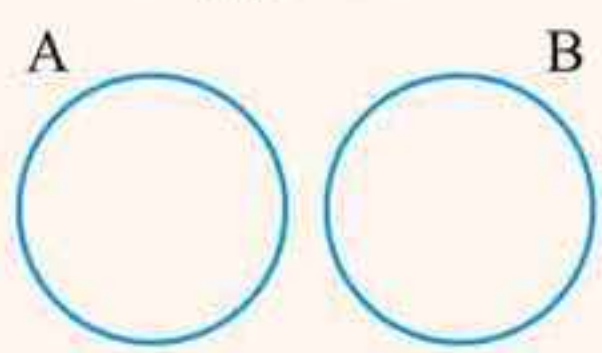
پیشامدهای مستقل و وابسته: دو پیشامد دلخواه A و B را مستقل گوییم، هر گاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل اند، اگر و تنها اگر:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته نامیده می‌شوند.

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

A و B دو پیشامد مستقل اند ($P(A) > 0$ و $P(B) > 0$)	A و B دو پیشامد ناسازگارند
$A \cap B \neq \emptyset$ 	$A \cap B = \emptyset$ 
$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	$P(A \cap B) = 0$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
می‌توانند با هم رخ بدهند (رخ دادن یکی تأثیری در رخ دادن دیگری ندارد.)	نمی‌توانند با هم رخ بدهند (رخ دادن توأم آنها غیرممکن است.)

متمم‌گیری، استقلال پیشامدها را حفظ می‌کند:

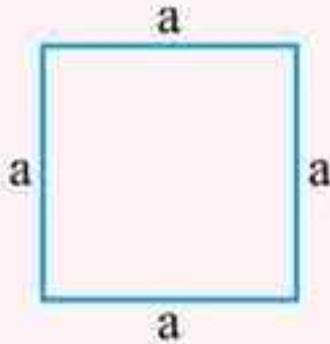
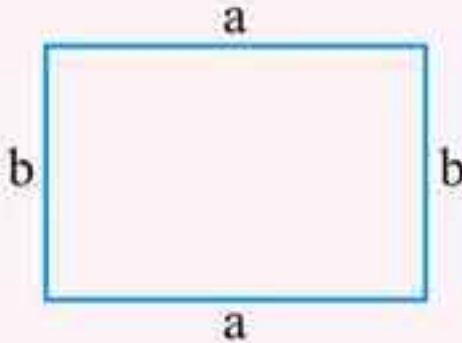
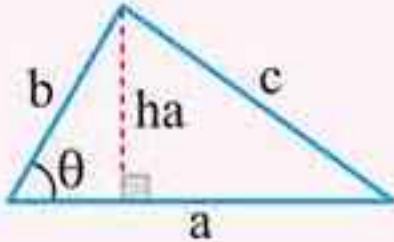
اگر A و B دو پیشامد مستقل از یک فضای نمونه‌ای باشند، آن‌گاه:

الف A و B نیز دو پیشامد مستقل اند.

پیوست ۱

محیط، مساحت و حجم

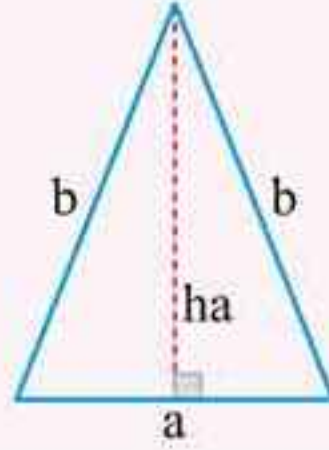
الف) شکل‌های دوبعدی: اگر مساحت آن‌ها را با S و محیط آن‌ها را با P نشان دهیم داریم:

نام شکل	شکل	محیط $P =$ و مساحت $S =$
مربع		$P = 4a$ $S = a \times a = a^2$
مستطیل		$P = 2(a + b)$ $S = a \cdot b$
مثلث		$P = a + b + c$ $S = \frac{a \cdot h_a}{2}$ $S = \frac{a \cdot b \cdot \sin \theta}{2}$



$$P = a + 2b$$

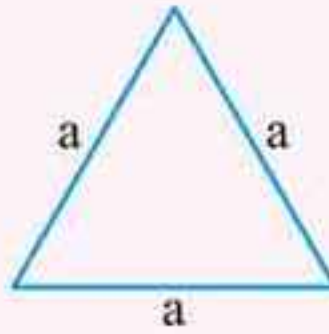
$$S = \frac{a \cdot h_a}{2}$$



مثلث
متساوی
الساقین

$$P = 3a$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$



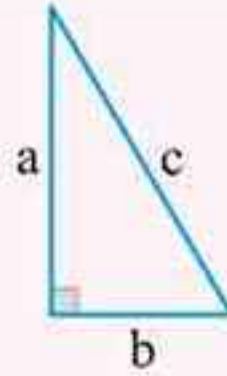
مثلث
متساوی
الاضلاع

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

ارتفاع

$$P = a + b + c$$

$$S = \frac{a \cdot b}{2}$$

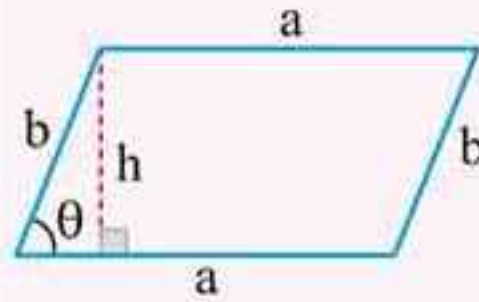


مثلث
قائم
الزاویه

$$P = 2(a + b)$$

$$S = a \cdot h$$

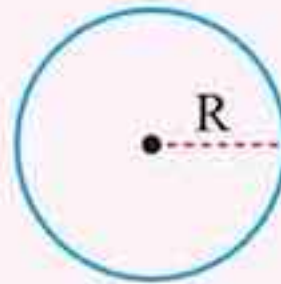
$$S = a \cdot b \cdot \sin \theta$$



متوازی
الاضلاع

$$P = 2\pi R \simeq 2 \times 3/14 \times R$$

$$S = \pi R^2 \simeq 3/14 \times R \times R$$

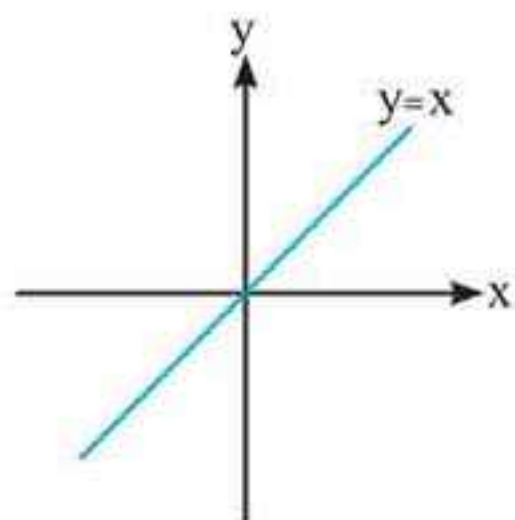


دایره

پیوست ۲

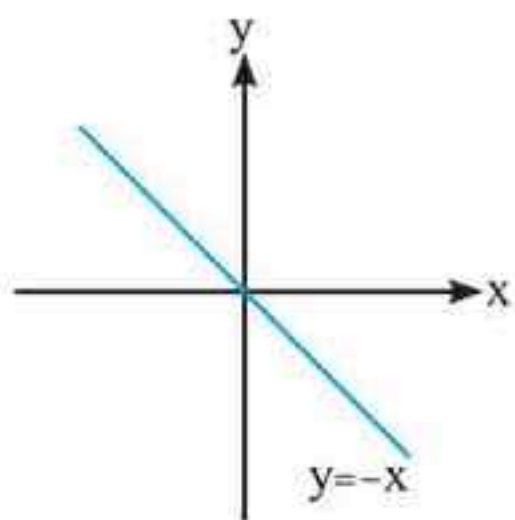
نمودارهای توابع مهم

ضابطه، نمودار و دامنه و برد توابع معروف



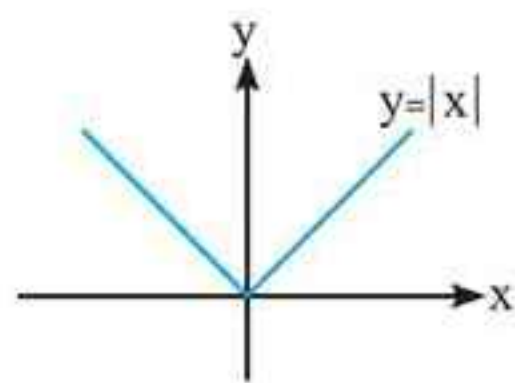
۱ نیمساز ربع اول و سوم:

$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$



۲ نیمساز ربع دوم و چهارم:

$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

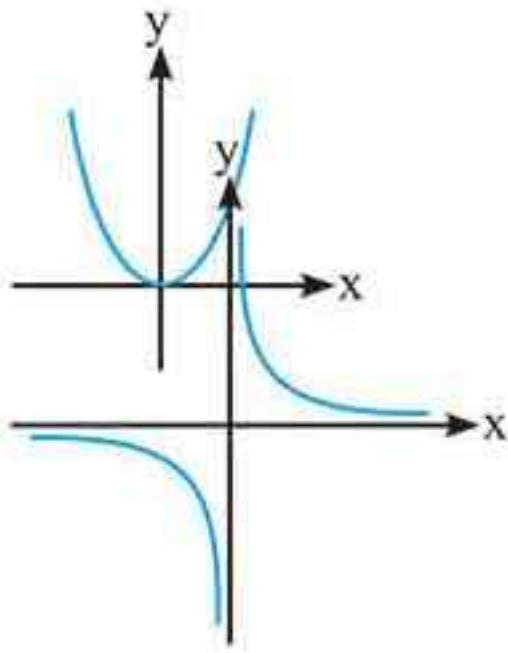


۳ تابع $y=|x|$:

$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [0, +\infty] \end{cases}$$



۴ تابع سهمی $y = x^2$:

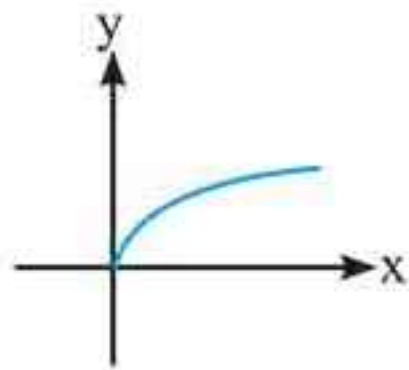


$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = [0, +\infty) \end{cases}$$

۵ تابع هموگرافیک $y = \frac{1}{x}$:

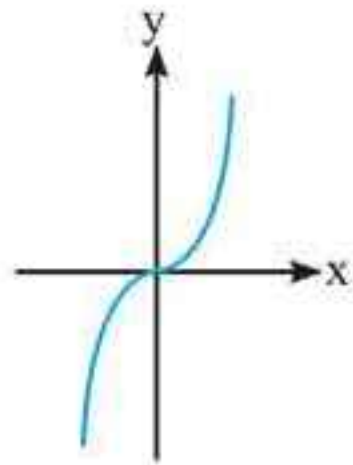
$$\begin{cases} D = \mathbb{R} - \{0\} \\ R = \mathbb{R} - \{0\} \end{cases}$$

۶ تابع $y = \sqrt{x}$ ریشه دوم:



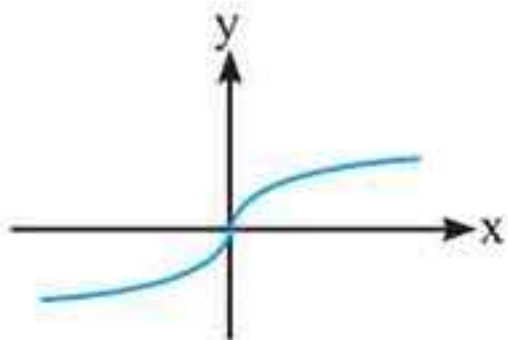
$$\begin{cases} D = [0, +\infty) \\ R = [0, +\infty) \end{cases}$$

۷ تابع $y = x^3$:



$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

۸ تابع $y = \sqrt[3]{x}$:



$$\begin{cases} D = \mathbb{R} \\ R = \mathbb{R} \end{cases}$$

۹ تابع نمایی $f(x) = a^x$: